-EXERCICE 13.1-

• ENONCE :

« Particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaires »

• Une particule de masse m, de charge $q \succ 0$, sans vitesse initiale, est placée à l'origine O d'un repère cartésien ; elle est soumise à l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ parallèle à l'axe Oz, et d'un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle à l'axe Ox.

• Déterminer la nature de la trajectoire (on pourra poser $\omega = \dfrac{qB}{m}$).

• CORRIGE :

« Particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaires »

• La force exercée par les champs électrique et magnétique s'écrit :
$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la particule dans le référentiel d'étude.

• Le PFD appliqué à la particule dans ce même référentiel fournit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \;\Rightarrow\; m\begin{pmatrix} \dfrac{dv_x}{dt} \\ \dfrac{dv_y}{dt} \\ \dfrac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = q\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \;\Rightarrow\; \begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = 0 & (1) \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = qBv_z & (2) \\ m\dfrac{dv_z}{dt} = q(E - Bv_y) & (3) \end{cases}$$

• L'équation (1) donne : $v_x(t) = cste = v(0) = 0 \Rightarrow x = cste = x(0) = 0 \Rightarrow$ le mouvement se fait **dans le plan yOz**.

• En posant $\omega = \dfrac{qB}{m}$ et en dérivant l'équation (2) par rapport au temps, il vient : $\dfrac{d^2v_y}{dt^2} = \omega\dfrac{dv_z}{dt}$

$\Rightarrow$ en combinant avec l'équation (3), on obtient : $\dfrac{d^2v_y}{dt^2} + \omega^2 v_y = \omega^2\dfrac{E}{B}$; d'où :

$v_y(t) = \dfrac{E}{B} + a\cos\omega t + b\sin\omega t$ (4) ; or : $v_y(0) = 0 = \dfrac{E}{B} + a \Rightarrow \boxed{a = -\dfrac{E}{B}}$

• Par ailleurs, en écrivant la relation (2) à t=0, on a : $\dfrac{dv_y(0)}{dt} = \omega v_z(0) = 0 \Rightarrow$ en dérivant l'expression (4) et en faisant t=0 , on obtient : $\omega b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$; finalement :

$v_y(t) = \dfrac{E}{B}(1 - \cos\omega t) \Rightarrow y(t) - y(0) = \dfrac{E}{B}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\times\sin\omega t\right)$; $y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = \dfrac{E}{\omega B}(\omega t - \sin\omega t)}$ (5)

• L'expression de v_y permet de déterminer v_z, soit :

$v_z(t) = \dfrac{E}{B}\sin\omega t \Rightarrow$ en tenant compte de $z(0) = 0$, il vient : $\boxed{z(t) = \dfrac{E}{\omega B}(1 - \cos\omega t)}$ (6)

Rq : les équations (5) et (6), avec $\theta = \omega t$, déterminent une trajectoire en forme de **cycloïde** .